

Candidato estático explícito para el sector $Q = 1$

0. Objetivo

Definir un candidato explícito $\Psi_1^{\text{trial}} \in X_1$ que:

- pertenezca inequívocamente al sector topológico $Q = 1$,
- sea una configuración conectada (no fragmentada),
- sirva como referencia energética E_1 en criterios de fragmentación.

1. Estructura del toy

Trabajamos con un campo

$$\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^3 \subset \mathbb{C}^2, \quad \psi^\dagger \psi = 1, \quad \psi(x) \rightarrow \psi_\infty \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty.$$

La condición de vacío compactifica el dominio:

$$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \simeq S^3.$$

2. Construcción topológica del candidato

Usamos coordenadas homogéneas $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ sobre S^3 :

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1.$$

Definimos el mapa racional fundamental

$$W_1(z_1, z_2) := \frac{z_1}{z_2}.$$

Este mapa define una aplicación

$$W_1 : S^3 \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \simeq S^2$$

que genera la clase de Hopf fundamental.

A partir de W_1 se construye un campo director

$$n_1 = n(W_1) \in S^2,$$

y, mediante un levantamiento compatible con el gauge, un representante

$$\Psi_1^{\text{trial}} := \psi_{W_1} \in X_1.$$

Observación 1. *El mapa $W_1 = z_1/z_2$ genera exactamente una unidad de enlace topológico:*

$$Q(\Psi_1^{\text{trial}}) = 1$$

en la normalización estándar del invariante de Hopf.

3. Carácter ligado

El candidato Ψ_1^{trial} es una única estructura conectada:

- no contiene parámetros de separación espacial,
- no es superposición de configuraciones de menor carga,
- no admite una descomposición asintótica en sectores no triviales.

Por tanto, es el representante elemental del espectro estático.

4. Escala interna y energía de referencia

Introducimos la familia por dilatación:

$$\psi_{1,R}^{\text{trial}}(x) := \psi_1^{\text{trial}}(x/R), \quad R > 0.$$

Para el funcional con término cuadrático y cuártico, la energía adopta la forma:

$$E_1^{\text{trial}}(R) = A_1 R + \frac{B_1}{R}, \quad A_1 > 0, \quad B_1 > 0,$$

donde

$$A_1 := c_1 \int_{\mathbb{R}^3} (D_i \psi_1^{\text{trial}})^\dagger (D_i \psi_1^{\text{trial}}) d^3 y, \quad B_1 := \kappa \int_{\mathbb{R}^3} S_{ij}(\psi_1^{\text{trial}}) S_{ij}(\psi_1^{\text{trial}}) d^3 y,$$

con $y = x/R$.

El mínimo energético existe y es explícito:

$$R_{1,\star} = \sqrt{\frac{B_1}{A_1}}, \quad E_{1,\star}^{\text{trial}} = 2\sqrt{A_1 B_1}.$$

5. Rol en el programa Serena

El candidato Ψ_1^{trial} cumple tres funciones fundamentales:

1. fija la escala energética base del espectro,
2. define el umbral mínimo para fragmentaciones,
3. sirve como bloque elemental en criterios de enlace para $Q \geq 2$.